線形変換の表現としてのヤコビ行列

preHilbert

Sunday, November 6, 2022

本ドキュメントは、2×2 のヤコビ行列（ jacobian matrix ）に関して解説したドキュメントです.2×2 のヤコビ行列とは、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への二変数関数 F が $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ において微分可能、すなわち

$$\Delta(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

とおいたとき

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \left| \frac{1}{\Delta(x, y)} \left(F(x, y) - F(x_0, y_0) - DF \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right) \right| = 0$$

を満たす線形写像 DF が存在するとき、この線形写像 DF の標準基底に関する表現行列をヤコビ行列といいます。

（Wikipedia から引用）

セクション 1 では、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への二変数関数の全微分可能性を定義するための準備として線形形式を定義し、その簡単な例として行ベクトルを挙げます。セクション 2 では。$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への二変数関数が全微分可能になるための必要条件を証明します。セクション 3 では、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への二変数関数の微分可能性を定義するための準備として線形変換を定義し、その簡単な例として行列を挙げます。セクション 4 では。$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への二変数関数が微分可能になるための必要条件を証明します。

第１版１刷　２０２２年１１月６日　東京都小平にて

1　線形形式

定義 1.1 (線形形式 (linear form))**.** $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への写像 T が**線形形式** (linear form) であるとは, 任意の $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}\right) = \alpha T\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$$

が成り立つことである.

例題 1.1. 行ベクトル $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}$ に対して

$$T\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 \qquad \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

とおけば, $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への写像 T は線形形式である.

証明. 実際, 任意の $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
T\left(\alpha\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}\right) &= T\begin{pmatrix}\alpha\xi_1+\beta\eta_1\\ \alpha\xi_2+\beta\eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\xi_1+\beta\eta_1\\ \alpha\xi_2+\beta\eta_2\end{pmatrix}\\
&= a_{11}\,(\,\alpha\xi_1+\beta\eta_1\,) + a_{12}\,(\,\alpha\xi_2+\beta\eta_2\,)\\
&= a_{11}\alpha\xi_1 + a_{11}\beta\eta_1 + a_{12}\alpha\xi_2 + a_{12}\beta\eta_2\\
&= \alpha a_{11}\xi_1 + \beta a_{11}\eta_1 + \alpha a_{12}\xi_2 + \beta a_{12}\eta_2\\
&= \alpha a_{11}\xi_1 + \alpha a_{12}\xi_2 + \beta a_{11}\eta_1 + \beta a_{12}\eta_2\\
&= \alpha\,(\,a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2\,) + \beta\,(\,a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2\,)\\
&= \alpha\left(\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\right) + \beta\left(\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}\right)\\
&= \alpha T\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって任意の $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}\right) = \alpha T\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$$

が成り立つ. □

このとき, 任意の $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_1\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \xi_2\end{pmatrix} = \xi_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + \xi_2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

となるから

$$T\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=T\left(\xi_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\xi_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\xi_1 T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\xi_2 T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$$

により

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=a_{11},\quad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=a_{12}$$

が成り立つ.

2 （全）微分可能性

定義 2.1 (（全）微分可能性)**.** $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が $(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$ において（全）微分可能であるとは, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

ならば

$$\left|\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\left(F(x, y)-F(x_0, y_0)-DF\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\right)\right|<\varepsilon$$

を満たす線形形式 $DF:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が存在することである.

定理 2.1 (全微分可能な関数)**.** $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が $(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$ において全微分可能ならば, F は, $x_0\in\mathbb{R}$ において $x-$ 方向に, $y_0\in\mathbb{R}$ において $y-$ 方向に, それぞれ偏微分可能で, その時に存在する線形形式 $DF:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に関して

$$DF\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0),\quad DF\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

が成り立つ.

証明. $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は $(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$ において全微分可能だから定義により, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

ならば

$$\left| \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \left(F(x,y) - F(x_0,y_0) - DF\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right) \right| < \varepsilon$$

を満たす線形形式 $DF:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在する.

1 : $y = y_0$ とおけば

$$|x-x_0| < \delta$$

ならば

$$\left| \frac{1}{|x-x_0|} \left(F(x,y_0) - F(x_0,y_0) - DF\begin{pmatrix} x-x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| < \varepsilon$$

が成り立つ. このとき

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{|x-x_0|} \left(F(x,y_0) - F(x_0,y_0) - DF\begin{pmatrix} x-x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|x-x_0|} \left(F(x,y_0) - F(x_0,y_0) - (x-x_0)\,DF\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|x-x_0|} (x-x_0) \left(\frac{F(x,y_0) - F(x_0,y_0)}{x-x_0} - DF\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|x-x_0|} \right| |x-x_0| \left| \frac{F(x,y_0) - F(x_0,y_0)}{x-x_0} - DF\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \frac{F(x,y_0) - F(x_0,y_0)}{x-x_0} - DF\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|
\end{aligned}$$

したがって

$$|x-x_0| < \delta \quad \text{ならば} \quad \left| \frac{F(x,y_0) - F(x_0,y_0)}{x-x_0} - DF\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| < \varepsilon$$

が成り立つから, $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ において $x-$ 方向に偏微分可能で

$$DF\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$$

が成り立つ.

2 : $x = x_0$ とおけば

$$|y-y_0| < \delta$$

ならば

$$\left| \frac{1}{|\, y - y_0 \,|} \left(F\,(\,x_0\,,\,y\,) - F\,(\,x_0\,,\,y_0\,) - DF \begin{pmatrix} 0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right) \right| < \varepsilon$$

が成り立つ. このとき

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{|\, y - y_0 \,|} \left(F\,(\,x_0\,,\,y\,) - F\,(\,x_0\,,\,y_0\,) - DF \begin{pmatrix} 0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|\, y - y_0 \,|} \left(F\,(\,x_0\,,\,y\,) - F\,(\,x_0\,,\,y_0\,) - (\,y - y_0\,)\, DF \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|\, y - y_0 \,|}\, (\,y - y_0\,) \left(\frac{F\,(\,x_0\,,\,y\,) - F\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y - y_0} - DF \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|\, y - y_0 \,|} \right| |\, y - y_0 \,| \left| \frac{F\,(\,x_0\,,\,y\,) - F\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y - y_0} - DF \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \frac{F\,(\,x_0\,,\,y\,) - F\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y - y_0} - DF \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|
\end{aligned}$$

したがって

$$|\, y - y_0 \,| < \delta \quad \text{ならば} \quad \left| \frac{F\,(\,x_0\,,\,y\,) - F\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y - y_0} - DF \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| < \varepsilon$$

が成り立つから, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は $(\,x_0\,,\,y_0\,) \in \mathbb{R}^2$ において $y-$ 方向に偏微分可能で

$$DF \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial y}\,(\,x_0\,,\,y_0\,)$$

が成り立つ.

□

3 線形変換 (Linear transformation)

定義 3.1 (線形変換 (Linear transformation))**.** $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 T が**線形変換** (Linear transformation) であるとは, 任意の $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$T\left(\alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \right) = \alpha T \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \beta T \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

が成り立つことである.

例題 3.1. 行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

に対して

$$T\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 \end{pmatrix}$$

は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線形変換である.

証明. 実際, 任意の $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
T\left(\alpha\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}\right) &= T\begin{pmatrix} \alpha\xi_1 + \beta\eta_1 \\ \alpha\xi_2 + \beta\eta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\xi_1 + \beta\eta_1 \\ \alpha\xi_2 + \beta\eta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(\alpha\xi_1 + \beta\eta_1) + a_{12}(\alpha\xi_2 + \beta\eta_2) \\ a_{21}(\alpha\xi_1 + \beta\eta_1) + a_{22}(\alpha\xi_2 + \beta\eta_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}\alpha\xi_1 + a_{11}\beta\eta_1 + a_{12}\alpha\xi_2 + a_{12}\beta\eta_2 \\ a_{21}\alpha\xi_1 + a_{21}\beta\eta_1 + a_{22}\alpha\xi_2 + a_{22}\beta\eta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}\alpha\xi_1 + a_{12}\alpha\xi_2 + a_{11}\beta\eta_1 + a_{12}\beta\eta_2 \\ a_{21}\alpha\xi_1 + a_{22}\alpha\xi_2 + a_{21}\beta\eta_1 + a_{22}\beta\eta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2) + \beta(a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2) \\ \alpha(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2) + \beta(a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2) \\ \alpha(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta(a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2) \\ \beta(a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2) \end{pmatrix} \\
&= \alpha\begin{pmatrix} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 \\ a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 \end{pmatrix} \\
&= \alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \\
&= \alpha T\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

したがって

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha T\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. □

この時

$$
\begin{aligned}
T\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = T\left(\xi_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\xi_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) &= T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\xi_1 + T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\xi_2 \\
&= \left(T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となるから

$$
T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\end{pmatrix}
$$

が成り立つ.

4 二変数関数の微分可能性

定義 4.1 (二変数関数の微分可能性)**.** 二変数関数 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を

$$
F(x,y) = \begin{pmatrix}f(x,y)\\g(x,y)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2
$$

とおいたとき,F が $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ において微分可能であるとは, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して

$$
\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta
$$

ならば

$$
\left|\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\left(\begin{pmatrix}f(x,y)\\g(x,y)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}f(x_0,y_0)\\g(x_0,y_0)\end{pmatrix}-DF\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\right)\right| < \varepsilon
$$

を満たす線形変換 $DF:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が存在することである.

定理 4.1 (jacobian matrix)**.** 二変数関数

$$
\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to F(x,y) = \begin{pmatrix}f(x,y)\\g(x,y)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2
$$

が $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ において微分可能ならば,$f(x,y)$, $g(x,y)$ は (x_0,y_0) において x に関して,(x_0,y_0) において y に関してそれぞれ偏微分可能で, その時に存在する線形変換 $DF:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ に関して

$$
DF\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\end{pmatrix}, \quad DF\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}
$$

が成り立つ. この時

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

を二変数関数 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ における**ヤコビ行列** (jacobian matrix) という.

証明. 二変数関数

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

は $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ において微分可能だから , 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

ならば

$$\left| \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \left(\begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{pmatrix} - DF \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right) \right| < \varepsilon$$

を満たす線形変換 $DF : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が存在する.

$y = y_0$ とおけば

$$|x - x_0| < \delta$$

ならば

$$\left| \frac{1}{|x - x_0|} \left(\begin{pmatrix} f(x, y_0) \\ g(x, y_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{pmatrix} - DF \begin{pmatrix} x - x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| < \varepsilon$$

が成り立つ. この時

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{|x - x_0|} \left(\begin{pmatrix} f(x, y_0) \\ g(x, y_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{pmatrix} - DF \begin{pmatrix} x - x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|x - x_0|} \left(\begin{pmatrix} f(x, y_0) \\ g(x, y_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{pmatrix} - (x - x_0) DF \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|x - x_0|} \left(\begin{pmatrix} f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \\ g(x, y_0) - g(x_0, y_0) \end{pmatrix} - (x - x_0) DF \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|x - x_0|} (x - x_0) \left(\begin{pmatrix} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ \frac{g(x, y_0) - g(x_0, y_0)}{x - x_0} \end{pmatrix} - DF \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ \frac{g(x, y_0) - g(x_0, y_0)}{x - x_0} \end{pmatrix} - DF \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|
\end{aligned}$$

となる. ここで

$$DF\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\end{pmatrix}$$

とおけば

$$\left|\begin{pmatrix}\frac{f(\,x\,,y_0\,)-f(\,x_0\,,y_0\,)}{x-x_0}\\\frac{g(\,x\,,y_0\,)-g(\,x_0\,,y_0\,)}{x-x_0}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\end{pmatrix}\right|<\varepsilon$$

が成り立つ. 絶対値を外せば

$$\sqrt{\left(\frac{f\,(\,x\,,\,y_0\,)-f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{x-x_0}-a_{11}\right)^2+\left(\frac{g\,(\,x\,,\,y_0\,)-g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{x-x_0}-a_{12}\right)^2}<\varepsilon$$

が成り立つ.

$$\left|\frac{f\,(\,x\,,\,y_0\,)-f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{x-x_0}-a_{11}\right|=\sqrt{\left(\frac{f\,(\,x\,,\,y_0\,)-f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{x-x_0}-a_{11}\right)^2}$$
$$\leq\sqrt{\left(\frac{f\,(\,x\,,\,y_0\,)-f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{x-x_0}-a_{11}\right)^2+\left(\frac{g\,(\,x\,,\,y_0\,)-g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{x-x_0}-a_{12}\right)^2}$$

$$\left|\frac{g\,(\,x\,,\,y_0\,)-g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{x-x_0}-a_{12}\right|=\sqrt{\left(\frac{g\,(\,x\,,\,y_0\,)-g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{x-x_0}-a_{12}\right)^2}$$
$$\leq\sqrt{\left(\frac{f\,(\,x\,,\,y_0\,)-f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{x-x_0}-a_{11}\right)^2+\left(\frac{g\,(\,x\,,\,y_0\,)-g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{x-x_0}-a_{12}\right)^2}$$

が成り立つ. したがって

$$|\,x-x_0\,|<\delta$$

ならば

$$\left|\frac{f\,(\,x\,,\,y_0\,)-f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{x-x_0}-a_{11}\right|<\varepsilon,\quad\left|\frac{g\,(\,x\,,\,y_0\,)-g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{x-x_0}-a_{12}\right|<\varepsilon$$

が成り立つ. したがって, 二変数関数 $f\,(\,x\,,\,y\,)$, $g\,(\,x\,,\,y\,)$ は $(\,x_0\,,\,y_0\,)\in\mathbb{R}^2$ において $x-$ 方向に偏微分可能で

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\,x_0\,,\,y_0\,)=a_{11},\quad\frac{\partial g}{\partial x}(\,x_0\,,\,y_0\,)=a_{12}$$

が成り立つ.

$x=x_0$ とおけば

$$|\,y-y_0\,|<\delta$$

ならば

$$\left|\frac{1}{|\,y-y_0\,|}\left(\begin{pmatrix}f\,(\,x_0\,,\,y\,)\\ g\,(\,x_0\,,\,y\,)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)\\ g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)\end{pmatrix}-DF\begin{pmatrix}0\\ y-y_0\end{pmatrix}\right)\right|<\varepsilon$$

が成り立つ. この時

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{|\,y-y_0\,|}\left(\begin{pmatrix}f\,(\,x_0\,,\,y\,)\\ g\,(\,x_0\,,\,y\,)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)\\ g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)\end{pmatrix}-DF\begin{pmatrix}0\\ y-y_0\end{pmatrix}\right)\right|\\
&=\left|\frac{1}{|\,y-y_0\,|}\left(\begin{pmatrix}f\,(\,x_0\,,\,y\,)\\ g\,(\,x_0\,,\,y\,)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)\\ g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)\end{pmatrix}-(\,y-y_0\,)\,DF\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right)\right|\\
&=\left|\frac{1}{|\,y-y_0\,|}\left(\begin{pmatrix}f\,(\,x_0\,,\,y\,)-f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)\\ g\,(\,x_0\,,\,y\,)-g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)\end{pmatrix}-(\,y-y_0\,)\,DF\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right)\right|\\
&=\left|\frac{1}{|\,y-y_0\,|}(\,y-y_0\,)\left(\begin{pmatrix}\frac{f(\,x_0\,,\,y\,)-f(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}\\ \frac{g(\,x_0\,,\,y\,)-g(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}\end{pmatrix}-DF\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right)\right|\\
&=\left|\begin{pmatrix}\frac{f(\,x_0\,,\,y\,)-f(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}\\ \frac{g(\,x_0\,,\,y\,)-g(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}\end{pmatrix}-DF\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right|\end{aligned}$$

となる. ここで

$$DF\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}\\ a_{22}\end{pmatrix}$$

とおけば

$$\left|\begin{pmatrix}\frac{f(\,x_0\,,\,y\,)-f(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}\\ \frac{g(\,x_0\,,\,y\,)-g(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_{21}\\ a_{22}\end{pmatrix}\right|<\varepsilon$$

だから, 絶対値を外せば

$$\sqrt{\left(\frac{f\,(\,x_0\,,\,y\,)-f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}-a_{21}\right)^2+\left(\frac{g\,(\,x_0\,,\,y\,)-g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}-a_{22}\right)^2}<\varepsilon$$

が成り立つ. この時

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f\,(\,x_0\,,\,y\,)-f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}-a_{21}\right|=\sqrt{\left(\frac{f\,(\,x_0\,,\,y\,)-f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}-a_{21}\right)^2}\\
&\leq\sqrt{\left(\frac{f\,(\,x_0\,,\,y\,)-f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}-a_{21}\right)^2+\left(\frac{g\,(\,x_0\,,\,y\,)-g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}-a_{22}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|\frac{g\,(\,x_0\,,\,y\,)-g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}-a_{22}\right|=\sqrt{\left(\frac{g\,(\,x_0\,,\,y\,)-g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}-a_{22}\right)^2}\\
&\leq\sqrt{\left(\frac{f\,(\,x_0\,,\,y\,)-f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}-a_{21}\right)^2+\left(\frac{g\,(\,x_0\,,\,y\,)-g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y-y_0}-a_{22}\right)^2}\end{aligned}$$

であるから

$$|\, y - y_0 \,| < \delta$$

ならば

$$\left| \frac{f\,(\,x_0\,,\,y\,) - f\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y - y_0} - a_{21} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{g\,(\,x_0\,,\,y\,) - g\,(\,x_0\,,\,y_0\,)}{y - y_0} - a_{22} \right| < \varepsilon$$

が成り立つ. したがって二変数関数 $f\,(\,x\,,\,y\,)$, $g\,(\,x\,,\,y\,)$ は $(\,x_0\,,\,y_0\,) \in \mathbb{R}^2$ において偏微分可能で

$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(\,x_0\,,\,y_0\,) = a_{21}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\,(\,x_0\,,\,y_0\,) = a_{22}$$

が成り立つ.

以上のことにより, 二変数関数

$$F\,(\,x\,,\,y\,) = \begin{pmatrix} f\,(\,x\,,\,y\,) \\ g\,(\,x\,,\,y\,) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

が $(\,x_0\,,\,y_0\,) \in \mathbb{R}^2$ において微分可能ならば, $f\,(\,x\,,\,y\,)$, $g\,(\,x\,,\,y\,)$ は $(\,x_0\,,\,y_0\,) \in \mathbb{R}^2$ において x に関して,y に関して, それぞれ偏微分可能で

$$DF \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\,(\,x_0\,,\,y_0\,) \\ \frac{\partial g}{\partial x}\,(\,x_0\,,\,y_0\,) \end{pmatrix}, \quad DF \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}\,(\,x_0\,,\,y_0\,) \\ \frac{\partial g}{\partial y}\,(\,x_0\,,\,y_0\,) \end{pmatrix}$$

が成り立つ. □