ε - δ 論法　私はこう理解しました

pre-Hilbert

Saturday, January 15, 2022

概 要

優しい風を吹かしたら, 今までぼんやりとしか映らなかった景色でも, くっきりと見えてくるかも知れません. 微分積分や解析学を学ばれる方にとって, 避けて通れない概念のひとつである ε - δ 論法を理解することで, 今までぼんやりとしか見えなかった極限の概念, すなわち **限りなく近い** という数学的意味がくっきりと見えてくるかも知れません.

セクション 3 の終わりに, いくつかの標準的な例題を用意しました. また最後のセクションでは関数の列の一様収束性を, ε - δ 論法を用いて定義します. 連続関数の列が一様収束するとき, その極限関数も連続になるという事実は, 連続関数全体の集合のつくる空間が一様ノルムの意味で完備になることを示す上で重要なポイントになります.

ε - δ 論法. 私は, こう理解しました.

1　数学における「任意」とは

任意 (arbitrary) という言葉を検索すると, 思いのままに任せるとか, 当人の自由意志に任せるという意味があると出てきます. 数学における任意とは, 特 に選び方を固定しないことを意味します. 例えば, 集合 A の任意の要素という場合「集合 A のどの要素でも」とか「集合 A のいずれの要素でも」という 意味になります. しかしこの場合,「集合 A のすべての要素」と表現しても同じだと考えてがちですが, 微妙に違いがあるので注意が必要です. 実例を挙げると

$A = \{$ 偶数全体の集合のすべての要素は、 2 で割り切れる $\}$

$A = \{$ 偶数全体の集合の任意の要素は、 2 で割り切れる $\}$

と記述した場合は, 同じ意味で用いられますが

$A = \{$ 開区間の上のすべての点において連続である $\}$

$A = \{$ 開区間の上の任意の点において連続である $\}$

と記述した場合は, 全く異なる意味で用います.

この場合の任意とは, 開区間の上の点を無作為（ランダム）に選んで固定するという意味で用います. 「開区間の上の任意の点で連続である. 故に, 開区間の上のすべての点で連続である.」と証明することが, 数学における常套手段です.

2　0に限りなく近い値

次の様な集合を考えます.

$$A = \{\, 1 \text{ より小さい正の実数} \,\}$$

いま, ε を集合 A の任意の要素とします. すなわち, 集合 A の要素の中から無作為に選んだ値 ε を固定します. このとき, ε の十分の一, 百分の一の値も集合 A の要素であることは確かですから

$$\delta < \varepsilon$$

を満たす集合 A の要素 δ が必ず存在します. この様に, どんなに小さい正の実数を選んでも, その値より小さい正の実数が存在すると記述することにより, 「0 に限りなく近い値」を表現します.

3　数列の極限（$\varepsilon - N$ 論法）

数列

$$x_n = \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, \cdots$$

を考えると, この数列は 0 に収束します. すなわち

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

が成り立ちます. 前節と同様にして, 任意の $\varepsilon > 0$ を固定すると

$$\frac{1}{N} < \varepsilon$$

を満たす自然数 N が存在します. 例えば $\varepsilon = 0.01$ の場合には $N = 101$ とすれば

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{101} < 0.01 = \varepsilon$$

が成り立ちます. また, 数列の作り方から

$$x_n < x_{n-1} \quad n = 1, 2, \cdots$$

が成り立つことにより

$$x_n < \varepsilon \quad n > N$$

が成り立ちます.

ここから一般の数列の話になります. 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

を満たすとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|\, x_n \,| < \varepsilon$$

を満たす自然数 n が無限個存在します. その中で添字番号が連番となる番号のうち, 最も小さい番号を N とすれば

$$|\, x_n \,| < \varepsilon \quad n \geq N$$

が成り立ちます. 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 x_0 に収束するとき, 数列 $\{x_n - x_0\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束するから数列の収束の定義を次の様に定義します.

定義 3.1. 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数 x_0 が, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して

$$|\, x_n - x_0 \,| < \varepsilon \quad n \geq N$$

を満たすとき, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は極限値 x_0 を持つといい, 記号で

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

と記述する.

> $\varepsilon - \delta$ 論法（$\varepsilon - N$ 論法）に慣れ親しむため簡単な例題を演習します.

例題 3.1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を x_0 に, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を y_0 に, それぞれ収束する数列とするとき

1 :

$$\lim_{n\to\infty} (\, x_n + y_n \,) = x_0 + y_0$$

2 : $\alpha \neq 0$ なる実数 α に対して

$$\lim_{n\to\infty} (\, \alpha x_n \,) = \alpha x_0$$

が成り立つ.

証明.

1： 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ により, ある自然数 N_1 が存在して

$$|\, x_n - x_0 \,| < \frac{\varepsilon}{2} \quad n \geq N_1$$

が成り立つ.

$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ により, ある自然数 N_2 が存在して

$$|\, y_n - y_0 \,| < \frac{\varepsilon}{2} \quad n \geq N_2$$

が成り立つ.

そこで $N = \max(\, N_1 \,,\, N_2 \,)$ とすれば $n \geq N$ ならば

$$n \geq N_1 \quad \text{かつ} \quad n \geq N_2$$

だから

$$\begin{aligned} |\, (\, x_n + y_n \,) - (\, x_0 + y_0 \,) \,| &= |\, (\, x_n - x_0 \,) + (\, y_n - y_0 \,) \,| \\ &\leq |\, x_n - x_0 \,| + |\, y_n - y_0 \,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって

$$\lim_{n\to\infty} (\, x_n + y_n \,) = x_0 + y_0$$

が成り立つ.

2： $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ により任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して

$$|\, x_n - x_0 \,| < \frac{\varepsilon}{|\, \alpha \,|} \quad n \geq N$$

が成り立つから

$$|\, \alpha x_n - \alpha x_0 \,| = |\, \alpha \,(\, x_n - x_0 \,) \,| = |\, \alpha \,|\,|\, x_n - x_0 \,| < |\, \alpha \,| \frac{\varepsilon}{|\, \alpha \,|} = \varepsilon$$

が成り立つ. したがって

$$\lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha x_0$$

が成り立つ.

□

例題 3.2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を x_0 に, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を y_0 に, それぞれ収束する数列とするとき

1：

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = x_0 y_0$$

2：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x_0}{y_0}$$

但し, 数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及び y_0 は 0 でないとする.

が成り立つ.

証明.

1： はじめに

$$\frac{\varepsilon}{1+|x_0|+|y_0|} < 1$$

を満たす十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ により, ある自然数 N_1 が存在して

$$|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{1+|x_0|+|y_0|} \quad n \geq N_1$$

が成り立つ.

$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ により, ある自然数 N_2 が存在して

$$|y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{1+|x_0|+|y_0|} \quad n \geq N_2$$

が成り立つ.

そこで, 差分を

$$\begin{aligned}
x_n y_n - x_0 y_0 &= (x_n y_n - x_0 y_n) + (x_0 y_n - x_0 y_0) \\
&= (x_n - x_0)\,y_n + x_0\,(y_n - y_0) \\
&= (x_n - x_0)\,((y_n - y_0) + y_0) + x_0\,(y_n - y_0) \\
&= (x_n - x_0)\,(y_n - y_0) + (x_n - x_0)\,y_0 + x_0\,(y_n - y_0)
\end{aligned}$$

と変形し $N = \max(N_1, N_2)$ とおけば, $n \geq N$ ならば

$$n \geq N_1 \quad \text{かつ} \quad n \geq N_2$$

だから

$$\begin{aligned}
|\,x_ny_n - x_0y_0\,| &= |\,(\,x_n - x_0\,)\,(\,y_n - y_0\,) + (\,x_n - x_0\,)\,y_0 + x_0\,(\,y_n - y_0\,)\,| \\
&\leq |\,x_n - x_0\,|\,|\,y_n - y_0\,| + |\,x_n - x_0\,|\,|\,y_0\,| + |\,x_0\,|\,|\,y_n - y_0\,| \\
&< \left(\frac{\varepsilon}{1 + |\,x_0\,| + |\,y_0\,|}\right)^2 + \frac{\varepsilon\,|\,y_0\,|}{1 + |\,x_0\,| + |\,y_0\,|} + \frac{\varepsilon\,|\,x_0\,|}{1 + |\,x_0\,| + |\,y_0\,|} \\
&< \frac{\varepsilon}{1 + |\,x_0\,| + |\,y_0\,|} + \frac{\varepsilon\,|\,y_0\,|}{1 + |\,x_0\,| + |\,y_0\,|} + \frac{\varepsilon\,|\,x_0\,|}{1 + |\,x_0\,| + |\,y_0\,|} \\
&= \varepsilon\left(\frac{1 + |\,y_0\,| + |\,x_0\,|}{1 + |\,x_0\,| + |\,y_0\,|}\right) = \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって

$$\lim_{n\to\infty}(\,x_ny_n\,) = x_0y_0$$

が成り立つ.

2 : はじめに

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{y_n}\right) = \frac{1}{y_0}$$

となることを示す. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して

$$|\,y_n - y_0\,| < \frac{|\,y_0\,|^2\,\varepsilon}{1 + \varepsilon\,|\,y_0\,|} \quad n \geq N$$

が成り立つ. ここで絶対値の負の三角不等式により

$$|\,y_0\,| - |\,y_n\,| \leq |\,y_0 - y_n\,| = |\,y_n - y_0\,| < \frac{|\,y_0\,|^2\,\varepsilon}{1 + \varepsilon\,|\,y_0\,|}$$

となるから, $n \geq N$ を満たす自然数 n に対して

$$\begin{aligned}
|\,y_n\,| > |\,y_0\,| - \frac{|\,y_0\,|^2\,\varepsilon}{1 + \varepsilon\,|\,y_0\,|} &= |\,y_0\,|\left(\frac{1 + \varepsilon\,|\,y_0\,|}{1 + \varepsilon\,|\,y_0\,|}\right) - \frac{|\,y_0\,|^2\,\varepsilon}{1 + \varepsilon\,|\,y_0\,|} \\
&= \frac{|\,y_0\,| + \varepsilon\,|\,y_0\,|^2}{1 + \varepsilon\,|\,y_0\,|} - \frac{|\,y_0\,|^2\,\varepsilon}{1 + \varepsilon\,|\,y_0\,|} \\
&= \frac{|\,y_0\,|}{1 + \varepsilon\,|\,y_0\,|} > 0
\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}
\left|\,\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}\,\right| = \left|\,\frac{y_0 - y_n}{y_ny_0}\,\right| = \frac{|\,y_0 - y_n\,|}{|\,y_n\,|\,|\,y_0\,|} &< \left(\frac{|\,y_0\,|^2\,\varepsilon}{1 + \varepsilon\,|\,y_0\,|}\right)\left(\frac{|\,y_0\,|}{1 + \varepsilon\,|\,y_0\,|}\,|\,y_0\,|\right)^{-1} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| < \varepsilon \quad n \geq N$$

となるから

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{y_n} \right) = \frac{1}{y_0}$$

が成り立つ. 故に 1 : と組み合わせれば

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(x_n \cdot \frac{1}{y_n} \right) = x_0 \cdot \frac{1}{y_0} = \frac{x_0}{y_0}$$

が成り立つ.

□

参考文献

[1] 微分積分学入門 http://www7b.biglobe.ne.jp/~h-kuroda/pdf/text_calculus.pdf

4 連続関数（ $\varepsilon - \delta$ 論法 ）

このセクションでは, 連続関数の定義を $\varepsilon - \delta$ 論法により定義することを目的とします.

$f(x)$ を点 x_0 の近傍で定義された関数とする.x_0 に収束する任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

を満たすとき, 関数 $f(x)$ は点 x_0 において連続であるという.

定理 4.1. 点 x_0 の近傍で定義された関数 $f(x)$ が x_0 において連続であるための必要十分条件は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成り立つことである.

この定理を証明する前に必要十分条件について復習しておきます.

「正方形である」ならば「長方形である」

という命題を考えます. このとき

長方形でない正方形は存在しないから, 長方形であることは正方形であるための**必要条件 (necessary condition)** である.

逆に

正方形でない長方形は無数存在するから, 正方形であることは長方形であるため**十分条件 (sufficient condition)** である.

$$\text{十分条件} \subset \text{必要条件}$$

という関係にあります. 以上のことを踏まえて, 上の定理を証明します.

証明.

必要：関数 $f(x)$ が x_0 において連続ならば, 必要条件を満たすことを背理法により示す. いま関数 $f(x)$ が x_0 において連続なときに, 必要条件を満たさないと仮定する. ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $\delta > 0$ に対して

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

が成り立つと仮定する. このとき, $\delta > 0$ は任意だから

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}$$

を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する. 数列の作り方から

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

が成り立つが仮定により

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

を満たすから

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq f(x_0)$$

となる. このことは関数 $f(x)$ が x_0 において連続であることに矛盾する. 故に関数 $f(x)$ が x_0 において連続ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - \delta| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

十分：関数 $f(x)$ は x_0 において連続. すなわち, x_0 に収束する任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

が成り立つことを示す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成り立つと仮定する. 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が x_0 に収束するとき, この $\delta > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して

$$|x_n - x_0| < \delta \quad n \geq N$$

が成り立つから, 仮定により

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \quad n \geq N$$

が成り立つ. 故に関数 $f(x)$ は x_0 において連続である.

□

5 関数列の各点収束と一様収束

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x),\ \cdots$$

のすべての項 $f_n(x)$ が区間 I の上のすべての点で定義されているものとする. 任意の $x_0 \in I$ に対して数列 $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $x = x_0$ で収束するといい, I のどの点においても収束するとき関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は区間 I の上で収束するという. このとき, 区間 I の各点 x における極限値を $f(x)$. すなわち

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad x \in I$$

により定義すれば, $f(x)$ は区間 I の上の関数になる. この関数を**極限関数**という.

定義 5.1 (各点収束)**.** 区間 I の上の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ と関数 $f(x)$ に対して, 任意の $x \in I$ を固定するとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して x と ε に依存する自然数 N が存在して

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad n \geq N$$

が成り立つとき, 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は関数 $f(x)$ に**各点収束**するという.

例題 5.1. 次の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数を求めよ.

1：

$$f_n(x) = x^n \quad 0 \le x \le 1$$

2：

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (n \le x < n+1) \\ 0 & (x < n,\ n+1 \le x) \end{cases}$$

3：

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & (0 \le x \le \frac{1}{n}) \\ -n^2 x + 2n & (\frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}) \\ 0 & (\frac{2}{n} \le x \le 2) \end{cases}$$

証明.

1： $0 \le x < 0$ と $x = 1$ との場合分けすれば

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

2： $x < 1$ ならば, すべての自然数 n に対して $f_n(x) = 0$ だから

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad x < 1$$

$1 \le x_0$ なる任意の x_0 を固定する.x_0 よりも小さな自然数の中で, いちばん大きい自然数を N とすれば

$$f_n(x_0) = 0 \quad n \ge N$$

となるから

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$$

ここで $1 \le x_0$ は任意だから

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad 1 \le x$$

が成り立つ. したがって

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

が成り立つ.

3： $x = 0$ ならば, すべての自然数 n に対して $f_n(0) = 0$ だから

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad x = 0$$

が成り立つ.$0 < x \leq 2$ の場合 $\dfrac{2}{x}$ より大きい自然数の中で, いちばん小さな自然数を N とすれば

$$\frac{2}{N} < x$$

だから

$$f_n(x) = 0 \quad n \geq N$$

が成り立つ. したがって

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad 0 < x \leq x$$

が成り立つ.

□

例題 5.2 (連続関数の極限関数が不連続である例)**.** $I = [0,\, 1]$ の上の関数列を $f_n(x) = x^n$ と定めると, $f_n(x)$ は I の上の連続関数である. 一方, 極限関数は

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

であるから $f(x)$ は $x = 1$ で左連続でない. したがって連続関数の関数列の各点収束極限関数は連続であるとは限らない. すなわち, この例題に関しては

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1-0} f_n(x)\right) \neq \lim_{x\to 1-0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$$

である.

例題 5.3 (極限と積分が交換できない広義積分の例)**.** $I = \mathbb{R}$ 上の関数列を

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (n \leq x \leq n+1) \\ 0 & (x < n,\ n+1 < x) \end{cases}$$

により定義すれば

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_n^{n+1} 1\, dx = (n+1) - n = 1$$

となるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, dx\right) = 1$$

一方, 極限関数は $f\,(\,x\,) = 0$ だから

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\,(\,x\,) \Big)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(\,x\,)\, dx = 0$$

となる. したがって, この例題に関しては

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n\,(\,x\,)\, dx \right) \neq \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\,(\,x\,) \Big)\, dx$$

である.

例題 5.4 (極限と積分が交換できない定積分の例)**.** 区間 $I = [0,\, 2]$ において

$$f_n\,(\,x\,) = \begin{cases} n^2 x & (0 \le x \le \frac{1}{n}) \\ -n^2 x + 2n & (\frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}) \\ 0 & (\frac{2}{n} \le x \le 2) \end{cases}$$

により定義すれば

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f_n\,(\,x\,)\, dx &= \int_0^{\frac{1}{n}} \big(\, n^2 x \,\big)\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \big(\, -n^2 x + 2n \,\big)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{2} n^2 x^2 \right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[-\frac{1}{2} n^2 x^2 + 2nx \right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \\
&= \frac{1}{2} n^2 \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\left(-\frac{1}{2} n^2 \left(\frac{2}{n} \right)^2 + 2n \frac{2}{n} \right) - \left(-\frac{1}{2} n^2 \left(\frac{1}{n} \right)^2 + 2n \frac{1}{n} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} + \left((\,-2+4\,) - \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + (\,-2+4-2\,) = 1
\end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f_n\,(\,x\,)\, dx &= \int_0^{\frac{1}{n}} \big(\, n^2 x \,\big)\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \big(\, -n^2 x + 2n \,\big)\, dx \\
&= n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x\, dx - n^2 \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} x\, dx + 2n \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} dx \\
&= n^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{1}{n}} - n^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} + 2n\, [\, x \,]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \\
&= n^2 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} - 0 \right) - n^2 \left(\frac{1}{2} \frac{4}{n^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \right) + 2n \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2 = 1
\end{aligned}$$

により

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n\,(\,x\,)\, dx = 1$$

である. 一方, 極限関数は $f(x)=0$ だから

$$\int_0^2 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = 0$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^2 f_n(x)\,dx \neq \int_0^2 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$$

が成り立つ.

定義 5.2 (一様収束)**.** 区間 I の上で定義された関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ と関数 $f(x)$ 任意の $\varepsilon>0$ に対して $x\in I$ に関係しない, ある自然数 N が存在して

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad n\geq N$$

を満たす時, 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は関数 $f(x)$ に一様収束する (converge uniformly) という.

定理 5.1. 区間 I の上で連続な関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $f(x)$ に一様収束するとき, 関数 $f(x)$ は区間 I の上で連続である.

証明. 任意の $x_0\in I$ を固定して, 関数 $f(x)$ が x_0 において連続になることを示す. 任意の $\varepsilon>0$ に対して, 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $f(x)$ に一様収束することにより, ある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad n\geq n_0,\ x\in I$$

が成り立つ. 特に $n=n_0$ に対して

$$|f_{n_0}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad x\in I$$

が成り立つ. このとき関数 $f_{n_0}(x)$ は $x_0\in I$ において連続だから

$$|x-x_0|<\delta \quad \text{ならば} \quad |f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

を満たす $\delta>0$ が存在する. したがって $|x-x_0|<\delta$ ならば

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &= |(f(x)-f_{n_0}(x))+(f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0))+(f_{n_0}(x_0)-f(x_0))| \\ &\leq |f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)| \\ &= \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つから関数 $f(x)$ は $x_0\in I$ において連続である. 故に $x_0\in I$ は任意だから, 関数 $f(x)$ は区間 I において連続である. □

Sunday, December 12, 2021 First edition
Monday, December 20, 2021 Second edition

$\epsilon - N$ 論法の例題を追加しました.

Saturday, January 15, 2022 3rd editoin

関数列の各点収束と一様収束のセクションを追加しました。

Sunday, April 3, 2022 4rd editoin